18/1/2019

ΑΠ3

Θεωρ. Πεπλ Συναρτ.

Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ ανοιχτό

$\bar{F} = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_m \end{pmatrix} : U \times V \to \mathbb{R}^m$, $\bar{F} \in C^1(U \times V, \mathbb{R}^m)$ και $(\bar{x}_0, \bar{y}_0) \in U \times V$

με $\bar{F}(\bar{x}_0, \bar{y}_0) = \bar{0}$ και $\frac{\partial F}{\partial \bar{y}}(\bar{x}_0, \bar{y}_0) := \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(\bar{x}_0, \bar{y}_0) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m}(\bar{x}_0, \bar{y}_0) \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1}(\bar{x}_0, \bar{y}_0) & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m}(\bar{x}_0, \bar{y}_0) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ αντιστρέψιμος.

Τότε $\exists \delta, \varepsilon > 0$ $\forall \bar{x} \in B(\bar{x}_0, \delta) \subset U$ $\exists ! \, \bar{g}(\bar{x}) \in B(\bar{y}_0, \varepsilon) \subset V$

ε.ω. $F(\bar{x}, \bar{g}(\bar{x})) = \bar{0}$ και $\bar{g}: B(\bar{x}_0, \delta) \to B(\bar{y}_0, \varepsilon)$ συνεχώς διαφορίσιμη

Ακόμα, ο $\frac{\partial F}{\partial \bar{y}}(\bar{x}, \bar{g}(\bar{x}))$ είναι αντιστρέψιμος $\forall \bar{x} \in B(\bar{x}_0, \delta)$ και

$$D\bar{g}(\bar{x}) = -\underbrace{\left(\frac{\partial F}{\partial \bar{y}}(\bar{x}, \bar{g}(\bar{x}))\right)^{-1}}_{\in \mathbb{R}^{m \times m}} \underbrace{\frac{\partial F}{\partial \bar{x}}(\bar{x}, \bar{g}(\bar{x}))}_{\in \mathbb{R}^{m \times n}}$$

$\xRightarrow{m=n=1}$ Έστω $F: (a,b) \times (c,d) \to \mathbb{R}$ συνεχώς διαφορίσιμη

$(x_0, y_0) \in (a,b) \times (c,d)$ με $F(x_0, y_0) = 0$ και $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$

$\Rightarrow \exists \delta, \varepsilon > 0$ $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (a,b)$ $\exists ! \, g(x) \in (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$

μοναδικό σε αυτό το διάστημα

ε.ω.: $F(x, g(x)) = 0$, $g \in C^1((x_0 - \delta, x_0 + \delta))$

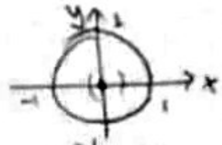
με $\frac{\partial F}{\partial y}(x, g(x)) \neq 0$ και $g'(x) = \dfrac{-\frac{\partial F}{\partial x}(x, g(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, g(x))}$ $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

[Διαπίστωση: η $g(x)$ ορίζεται πεπλ. μέσω της $F(x,y) = 0$ κοντά σε μια λύση της (x_0, y_0)]

Παράδειγμα / Άσκηση (Α 89)

Δείξτε (χωρίς ρητή επίλυση) [δηλ. χρησιμοποιώντας το ΘΠΣ] ότι για $x \in \mathbb{R}$, αρκετά κοντά στο 0 [δηλ. $|x| < \varepsilon$ για κάποιο $\varepsilon > 0$] $\exists$ θετικές λύσεις $y(x) \in \mathbb{R}$ της εξίσωσης $x^2 + y^2 = 1$ με $y'(x) = -\frac{x}{y(x)}$.

Λύση: (με ΘΠΣ)



Για $(x_0,y_0)=(0,1)$ ισχύει $F(x_0,y_0):=x_0^2+y_0^2-1=0$ $\quad [F(x,y)=x^2+y^2-1]$

η $F\in C^\infty(\mathbb{R}^2)\subset C^1(\mathbb{R}^2)$ και $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)=2y_0\neq 0 \xrightarrow{ΘΠΣ} \exists\, \delta>0, \varepsilon>0$

$\exists!\, y(x)\in(1-\varepsilon,1+\varepsilon)$ με $F(x,y(x))=0 \ \forall x\in(-\delta,\delta)$

και $y'(x)=\dfrac{-\frac{\partial F}{\partial x}(x,y(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y(x))}=-\dfrac{2x}{2y(x)}=-\dfrac{x}{y(x)}$

Επιβεβαίωση: $x^2+y^2=1 \Rightarrow y=\pm\sqrt{1-x^2}$

Επιλέγουμε: $y(x)=\sqrt{1-x^2}$, $x\in(-1,1)$

$\Rightarrow y'(x)=\dfrac{1}{2}\dfrac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}=-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}=-\dfrac{x}{y(x)}$

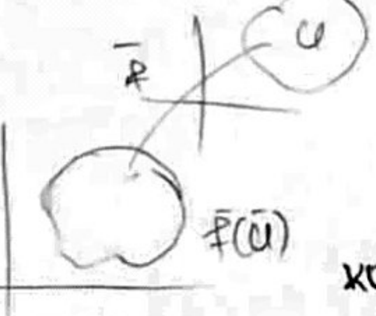
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

1) Το Θ. Πολλαπλ. Lagrange αποδεικνύεται με χρήση του ΘΠΣ

2) Πόρισμα του ΘΠΣ: (Θεώρημα Αντίστροφης Συνάρτησης)

Έστω $U\subset\mathbb{R}^n$ ανοιχτό, $\bar x_0\in U$ και $\bar f: U\to\mathbb{R}^n$

με $\bar f\in C^1(U,\mathbb{R}^n)$ με $D\bar f(\bar x_0)\in\mathbb{R}^{n\times n}$ αντιστρέψιμο.



Τότε, υπάρχουν ένα U_0 ανοιχτό με $\bar x_0\in U_0\subset U$

και $V=B(\bar f(\bar x_0),\varepsilon)$

ώστε η $\bar f/_{U_0}: U_0\to V$ 1-1 και επί

και η αντίστροφη της $\bar g\ (\bar f/_{U_0})^{-1}: V\to U_0$

είναι $\in C^1(V,\mathbb{R}^n)$ με $D\bar f(\underset{\bar f(\bar x)}{\underset{\parallel}{\bar g(\bar y)}})\in\mathbb{R}^{n\times n}$ είναι

αντιστρέψιμη $\forall \bar y\in V$ και $D\bar g(\underset{\bar f(\bar x)}{\underset{\parallel}{\bar y}})=D\bar f(\underset{\bar f(\bar x)}{\underset{\parallel}{\bar g(\bar y)}})^{-1}\in\mathbb{R}^{n\times n}\ \forall\bar y\in V$

$\Leftrightarrow D\bar g(\bar f(\bar x))=(D\bar f(\bar x))^{-1}\in\mathbb{R}^{n\times n},\ \forall\bar x\in U$

$\bar f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$: 1-1 και επί, συνεχώς διαφ., με $\det(D\bar f(\bar x))\neq 0\ \forall\bar x$

$\Rightarrow (D\bar f^{-1})(\bar y)=(D\bar f(\bar x))^{-1}$

$\Leftrightarrow$

$(D\bar f^{-1})(\bar y)\,D\bar f(\bar x)=I$

Άσκηση: $\bar{x} = \bar{f}^{-1}(\bar{f}(\bar{x})) \Rightarrow D\bar{x} = (D\bar{f}^{-1})(\bar{f}(\bar{x}))\, D\bar{f}(\bar{x})$.

$$D\bar{x} = \underbrace{D\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix}}_{= I}$$

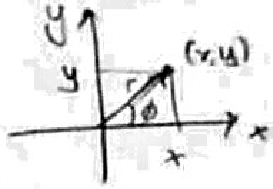
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Το ΘΑΣ απαιτεί σχέση διαφ. διαν. πεδίου, αντιστρεψιμότητα της παραγώγου γύρω από ένα σημείο

⇒ μπορώ, γενικώς, να αντιστρέψω συνεχ. διαφ. διαν. πεδίο $\bar{f}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ μόνο τοπικά

π.χ. (Πολικές συντεταγμένες)

$\bar{f}: (0,\infty)\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\bar{f}(r,\phi) = \begin{pmatrix}x(r,\phi)\\ y(r,\phi)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}r\cos\phi\\ r\sin\phi\end{pmatrix}$



$r = \|(x,y)\|$

Άσκηση με ΘΑΣ δ.ο.

$\forall (r_0,\phi_0)\in(0,\infty)\times\mathbb{R}$ υπάρχει τοπικά αντίστροφη συνάρτηση

(π.χ. η $\bar{f}: (0,\infty)\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ είναι επί αλλά δεν είναι 1-1, αφού η $\bar{f}: (0,\infty)\times(-\pi,\pi) \to \mathbb{R}^2$

$\bar{f}(r,\phi+2k\pi) = \bar{f}(r,\phi)\ \forall k\in\mathbb{Z}$ άρα αντιστρέφεται ολικά.

Αλλαγή θέματος (Ακρότατα)

Είδαμε για την $f: \bar{B}((0,0),1) \to \mathbb{R}$, $f(x,y)=xy$ ότι

(α) έχει στο εσωτ. του δίσκου μόνο σαγμ. σημείο στο $(0,0)$

(β) επειδή έχει ακρότατα («συνεχής εικόνα συμπαγούς») αυτά, αναγκαστικά θα είναι στον κύκλο $\partial B((0,0),1)$

(γ) πολλαπλ. Lagrange ⇒ πιθανά σημεία ακροτάτων $\left(\pm\frac{1}{\sqrt2}, \pm\frac{1}{\sqrt2}\right)$ και $\left(\pm\frac{1}{\sqrt2}, \pm\frac{1}{\sqrt2}\right)$ διαπιστώνουμε ότι στα πρώτα $f = \frac{1}{2}$, στα δεύτερα $f = -\frac{1}{2}$

↳ αν πάρω "+" παίρνω και τα δύο όμοια για "−"

Τα ακρότατα αυτά του κύκλου είναι και του κλειστού

[αφού $\underbrace{\forall (x,y)\in B((0,0),1)}_{\Leftrightarrow\, x^2+y^2<1}$ $|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2+y^2) < \frac{1}{2}$]

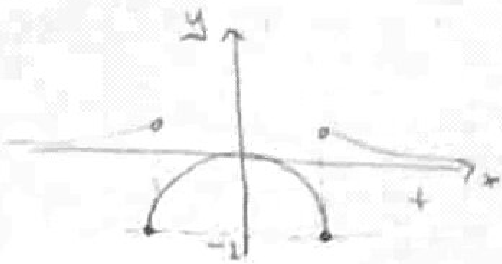
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ (1) ΔΕΝ ΑΠΑΙΤΕΙΤΑΙ ΠΑΝΤΑ LAGR !

πχ στο β θέλουμε τα ακρότατα της $f: \partial B((0,0),1) \to \mathbb{R}$. Άρα, θέλουμε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(t) = f(\cos t, \sin t) = \cos t \sin t$, $t \in \mathbb{R}$.

(2) ΑΝ ΑΛΛΑΞΕΙ ΤΟ Π.Ο. Η' Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ !

της $f: \bar{B}((0,0),1) \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = xy$ αλλάζουν τα πράγματα

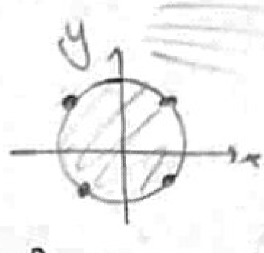
πχ $g(x,y) = \begin{cases} xy, & (x,y) \in B((0,0),1) \\ e^{-x^2-y^2}, & (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{B}((0,0),1) \end{cases}$



[Διαχωρισμός: $\mathring{U} \cup \partial U \cup \text{ext}\, U = \mathbb{R}^n$ ξένα μεταξύ τους]

Στο $B((0,0),1)$ η g δεν έχει ακρότατα ...

Στο $\partial B((0,0),1)$ η $g|_{\partial B((0,0),1)}$ έχει ακρότατα ...



Στο $\text{ext}(B((0,0),1)) = \mathbb{R}^2 \setminus \bar{B}((0,0),1)$ (ανοιχτό)

$\nabla e^{-x^2-y^2} = e^{-x^2-y^2}(-2x,-2y) = (0,0) \Rightarrow \nexists$ αφού $x^2+y^2>1$ για $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{B}((0,0),1) \Rightarrow$ στο $\text{ext}(\ldots)$ η g δεν έχει ακροτ.

~~Η g τελικά δεν έχει κανένα ακρότατα~~

Στα $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ η g έχει μέγιστα αφού $g\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2} \geq g(x,y)$ $\forall (x,y) \in \bar{B}((0,0),1)$ και $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{B}$

Στα $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ η g έχει ελάχιστα, αφού για $(x(t),y(t)) = \gamma(t) = t\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ έχουμε την $\bar{g}(t) = \begin{cases} -t^2, & t \in [-1,1] \\ e^{-t^2}, & t \in \mathbb{R} \setminus [-1,1] \end{cases}$